定理overview1

2019年11月6日 星期三 11:24

虚功原理

(定常、理想) 静平衡 $\Longleftrightarrow$ 所有主动力虚功之和为0

被动力虚功之和为0

主动力与 $\Sigma\vec{F_i}$

被动力平衡 $\Sigma\vec{F_i}'$

虚位移的思想：不要看成是一种实位移，是坐标变换关系和变分(微分)运算。

$\vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha} = F\delta\alpha$ ⇒ 用广义坐标表示出 x ⇒ 变分运算计算出 δx

广义力

- (定常、理想)

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N}\vec{F_i}\cdot\delta\vec{r_i} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F_i}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\vec{r_i}}{\partial q_k}\delta q_k = \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N}\vec{F_i}\cdot\frac{\partial\vec{r_i}}{\partial q_k}\right)}_{=Q_k}\delta q_k$$

define广义力 Q_k

- 静平衡 $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} Q_k\delta q_k = 0$
  - (对完整系统，δq_k 独立 ⇒ $Q_k=0$)。

- (若所有主动力均为有势力)

$$\delta W = -\delta V = -\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial q_k}\delta q_k$$

$\Rightarrow Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$ 保守系统 形式上 $Q_k = \frac{\partial W}{\partial q_k}$

Lagrange未定乘子法求约束力

①一开始不承认与约束力相应的约束条件 ⇒ ②选广义坐标，$\underbrace{\text{实不独立}}_{\text{用}\lambda_1,\lambda_2}$

$\vec{N_1}$ $\vec{N_2}$ f_1 f_2 q_1,q_2,q_3

$$\delta W + \lambda_1\delta f_1 + \lambda_2\delta f_2 = 0$$

③ ⇒ $\boxed{}\,\delta q_1 + \boxed{}\,\delta q_2 + \boxed{}\,\delta q_3 = 0$ ⇒ ④求得 λ_1,λ_2.

则 $=0$ $=0$ $=0$

$\Downarrow$

$N_1 = \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial q_1}$ $N_2 = \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial q_2}$

d'Alembert 原理

动力学方程 $\vec{F_i} + \vec{F_i}' = m_i\ddot{\vec{r_i}}$

(理想约束) $\sum_{i=1}^{N}(\vec{F_i} - m_i\ddot{\vec{r_i}})\cdot\delta\vec{r_i} = 0$

$\Sigma\vec{F_i}'\cdot\delta\vec{r_i} = 0$

* 惯性系中

例 2 两根刚性杆用光滑铰链连接如图 2–5所示. 上杆长 l_1, 质量为 m_1, 下杆长 l_2, 质量为 m_2. 在下杆的下端施加不变的水平力 $\boldsymbol{F}$, 试求平衡时两杆各自同竖直线的夹角 θ_1 和 θ_2.

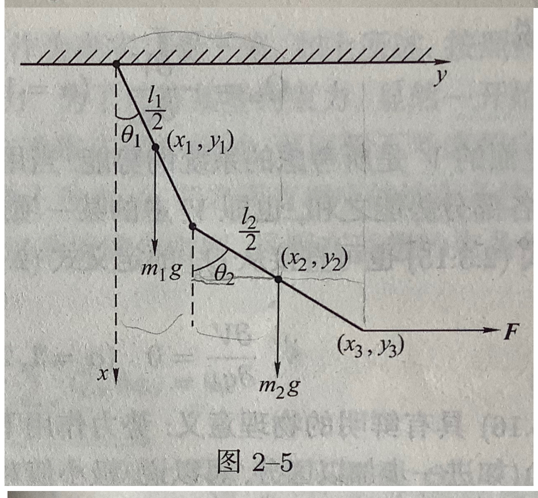

图 2–5

解 光滑铰链是理想约束. 所需考虑的主动力有水平力 F、重力 m_1g 和重力 m_2g. 系统有两个自由度, θ_1 和 θ_2 就是系统的广义坐标.

按照虚功原理

$$m_1g\,\delta x_1 + m_2g\,\delta x_2 + F\,\delta y_3 = 0. \tag{1}$$

从图 2–5 容易看出: x_1、x_2 和 y_3 可用广义坐标 θ_1 和 θ_2 表为

$$x_1 = \frac{1}{2}l_1\cos\theta_1, x_2 = l_1\cos\theta_1 + \frac{1}{2}l_2\cos\theta_2, \quad y_3 = l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2. \tag{2}$$

把式 (2) 代入式 (1), 得

$$\left(F\cos\theta_1 - \frac{1}{2}m_1g\sin\theta_1 - m_2g\sin\theta_1\right)l_1\delta\theta_1 + \left(F\cos\theta_2 - \frac{1}{2}m_2g\sin\theta_2\right)l_2\delta\theta_2 = 0.$$

既然 $\delta\theta_1$ 和 $\delta\theta_2$ 是任意的并且互相独立, 上式两个括号之值分别等于零, 即

$$\begin{cases} F\cos\theta_1 - \left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right)g\sin\theta_1 = 0, \\ F\cos\theta_2 - \frac{1}{2}m_2g\sin\theta_2 = 0. \end{cases}$$

由此解得

$$\tan\theta_1 = \frac{2F}{(m_1+2m_2)g}, \tan\theta_2 = \frac{2F}{m_2g}. \tag{3}$$

例 4 试求例 2 两杆铰接处的相互作用力.

解 本题所求为两杆铰接处的约束力, 所以选取广义坐标时不考虑铰接的约束条件. 按照质心运动定理, 下杆所受的各个力, 包括铰接处的约束力可以看作集中作用于杆的质心, 因此我们选下杆质心的坐标 x_2, y_2 作为特定的广义坐标. 另选确定上杆位置的 θ_1 和确定下杆位置的 θ_2 作广义坐标. 总共有四个广义坐标, 即 $\theta_1, \theta_2, x_2, y_2$.

按照虚功原理, $m_1g\,\delta x_1 + m_2g\,\delta x_2 + F\delta y_3 = 0$. 用广义坐标 $\theta_1, \theta_2, x_2, y_2$ 表出, 即

$$m_1g\delta\left(\frac{1}{2}l_1\cos\theta_1\right) + m_2g\delta x_2 + F\delta\left(\frac{1}{2}l_2\sin\theta_2 + y_2\right) = 0,$$

即

$$-\frac{1}{2}l_1m_1g\sin\theta_1\delta\theta_1 + m_2g\delta x_2 + F\delta y_2 + \frac{1}{2}l_2\cos\theta_2F\delta\theta_2 = 0. \tag{1}$$

由此看出, 对应于 δx_2 和 δy_2 的主动力分别是 m_2g 和 F. 这是说, 下杆所受主动力的 x 分量是 m_2g, 而 y 分量是 F.

式(1) 的 $\delta\theta_1, \delta\theta_2, \delta x_2, \delta y_2$ 并不独立, 它们受到铰接条件的约束,

$$\begin{cases} f_1(x_2, y_2, \theta_1, \theta_2) \equiv l_1\cos\theta_1 + \frac{1}{2}l_2\cos\theta_2 - x_2 = 0, \\ f_2(x_2, y_2, \theta_1, \theta_2) \equiv l_1\sin\theta_1 + \frac{1}{2}l_2\sin\theta_2 - y_2 = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -l_1\sin\theta_1\delta\theta_1 - \frac{1}{2}l_2\sin\theta_2\delta\theta_2 - \delta x_2 = 0, & (2) \\ l_1\cos\theta_1\delta\theta_1 + \frac{1}{2}l_2\cos\theta_2\delta\theta_2 - \delta y_2 = 0. & (3) \end{cases}$$

用 λ_1 遍乘式 (2) 的各项, λ_2 遍乘式 (3) 的各项, 并与式 (1) 相加

$$l_1\left(-\frac{1}{2}m_1g\sin\theta_1 - \lambda_1\sin\theta_1 + \lambda_2\cos\theta_1\right)\delta\theta_1 + (m_2g - \lambda_1)\delta x_2 + (F - \lambda_2)\delta y_2 + l_2\left(\frac{1}{2}F\cos\theta_2 - \frac{1}{2}\lambda_1\sin\theta_2 + \frac{1}{2}\lambda_2\cos\theta_2\right)\delta\theta_2 = 0. \tag{4}$$

令各个系数分别为零, 即得式 (2.3.23) 形式的平衡方程, 其中对应于 δx_2 和 δy_2 的两个平衡方程是

$$m_2g - \lambda_1 = 0, F - \lambda_2 = 0.$$

两式左边第一项各是主动力, 第二项显然各是约束力, 它们正如式 (2.3.24) 所指出, 分别是 $\lambda_1\partial f_1/\partial x_2 + \lambda_2\partial f_2/\partial x_2$ 和 $\lambda_1\partial f_1/\partial y_2 + \lambda_2\partial f_2/\partial y_2$. 这样, 下杆所受 x 方向约束力为 $-\lambda_1 = -m_2g$, y 方向约束力为 $-\lambda_2 = -F$.