换元积分 雅可比

2021年8月5日 星期四 15:01

利用变元替换计算面积的公式为

$$\sigma(D)=\iint_E \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

曲线坐标下的面积元

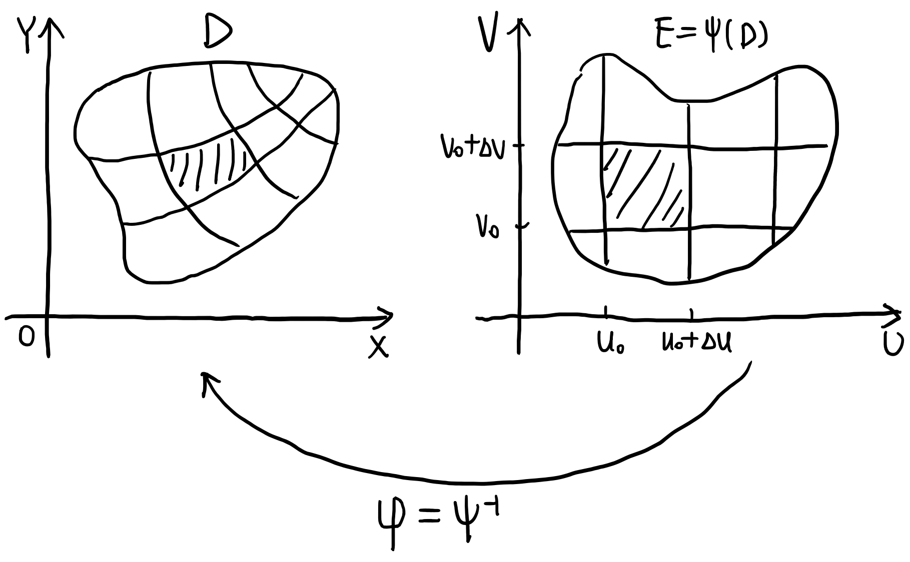
以 $\vec{\alpha}_1=(\xi_1,\eta_1)$ 和 $\vec{\alpha}_2=(\xi_2,\eta_2)$ 为相邻两边的平行四边形，其面积为

$$|\vec{\alpha}_1\times\vec{\alpha}_2|=\left|\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1\\ \xi_2 & \eta_2\end{vmatrix}\right|$$

如果用平行于 OX轴和OY轴的两族直线分割闭区域D,

那么边长为 Δx 和 Δy 的微小矩形面积应为 $\Delta x\Delta y$.

直角坐标系中的面积元 $dxdy=\Delta x\Delta y$



假设用两族曲线 $u(x,y)=const$ 和 $v(x,y)=const$ 来分割区域D.

$$\psi:\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$$

要求映射 ψ 在包含D的一个开集V上是连续可微的

并且满足 (1) $\det D\psi(x,y)\neq 0$，$\forall (x,y)\in V$;

(2) ψ 在D中是单一的

设这曲线四边形为以下四条曲线所围成

$u(x,y)=u_0$　　$u(x,y)=u_0+\Delta u$

$v(x,y)=v_0$　　$v(x,y)=v_0+\Delta v$

曲线四边形顶点

$(x_0,y_0)=(x(u_0,v_0),\ y(u_0,v_0))$

$(x_1,y_1)=(x(u_0+\Delta u,v_0),\ y(u_0+\Delta u,v_0))$

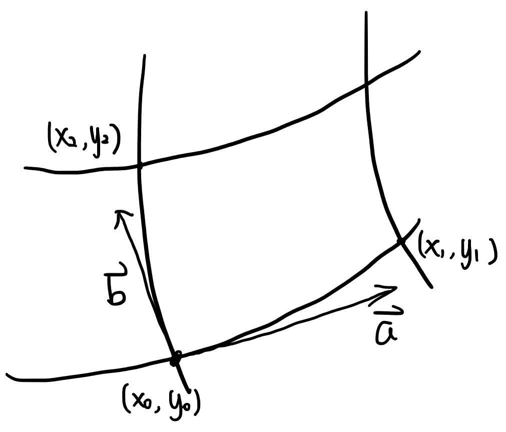
$(x_2,y_2)=(x(u_0,v_0+\Delta v),\ y(u_0,v_0+\Delta v))$

$(x_3,y_3)=(x(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v)),\ y(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v))$

对于充分小的 $\Delta u>0$ 和 $\Delta v>0$，可以认为

$x_1-x_0\approx\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u$，$y_1-y_0\approx\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u$,

$x_2-x_0\approx\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v$，$y_2-y_0\approx\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v$



$\vec{a}=(\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u,\ \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u)$

$\vec{b}=(\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v,\ \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v)$

$|\vec{a}\times\vec{b}|=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Delta u\Delta v$

$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Delta u\Delta v$

二阶雅可比矩阵的几何意义就是把标准直角坐标系下的微分正方形 $dx\,dy$
变换成了曲线坐标系下的微分平行四边形 $du\,dv$.

二阶雅可比行列式的几何意义就是由标准直角坐标系下的微分正方形 $dx\,dy$
所表示的面积变换到了曲线坐标系下的微分平行四边形 $du\,dv$ 所表示的面积微元之比率

雅可比矩阵是线性代数和微积分的纽带,

是把非线性问题转换为线性问题的有力工具之一.

把某方程的原坐标系 $\{O,y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ 被替换成 $\{O,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 坐标系.

$$\begin{cases}y_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ y_2=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \quad\vdots\\ y_n=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{cases}$$

$$\begin{cases}dy_1=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial x_n}dx_n\\ dy_2=\frac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial f_2}{\partial x_n}dx_n\\ \quad\vdots\\ dy_n=\frac{\partial f_n}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f_n}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}dx_n\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}dy_1\\ dy_2\\ \vdots\\ dy_n\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}}_{\text{雅可比}}\begin{pmatrix}dx_1\\ dx_2\\ \vdots\\ dx_n\end{pmatrix}$$