一元函数

2021年7月22日 星期四 20:40

极限

数列极限的"ε-N 语言"

设有数列 $\{x_n\}$，若存在 $A\in\mathbb{R}$，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，
使得当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-A|<\varepsilon$，则称数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限，
也称 $\{x_n\}$ 收敛于 A，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$，或 $x_n\to A\ (n\to\infty)$.

证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1$

$\forall\varepsilon>0$，$\left|\frac{n}{n+2}-1\right|=\frac{2}{n+2}<\frac{2}{n}$

令 $\frac{2}{n}<\varepsilon \Rightarrow n>\frac{2}{\varepsilon}$

取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时，$\forall\varepsilon>0$，$\left|\frac{n}{n+2}-1\right|<\varepsilon$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1$.

函数极限的"ε-δ"语言 —— 某处的极限

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{N}(x_0)$ 内有定义，
A 为一给定的常数，若对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，
使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，
则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)=A$

证 $\lim\limits_{x\to 3} x^3=27$.

$|x^3-27|=|x-3||x^2+3x+9|$

不妨设 $|x-3|<1$

$<37|x-3|$

令 $37|x-3|<\varepsilon$，$|x-3|<\frac{\varepsilon}{37}$

取 $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{37}\right\}$，则当 $0<|x-3|<\delta$ 时，$|x^3-27|<\varepsilon$.

故 $\lim\limits_{x\to 3} x^3=27$

导数

导函数

求 $\sin x$ 导数

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta x\cos x}{\Delta x}=\cos x$$

反函数的导数

设函数 $x=\varphi(y)$ 在某一区间 I 内严格单调，
又在区间 I 内一点 y 处导数 $\varphi'(y)$ 存在且不为零，
则反函数 $y=f(x)$ 在对应点 $x\,(=\varphi(y))$ 处也是可导的，且 $f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$，即 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

求 $y=\arcsin x$ 导数

$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}$

$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}\quad\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

微分

中值定理

此为万恶之源！

L'Hospital 法则

$\frac{0}{0}$ 不定型

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足：

1) $x\to a$ 时 $f(x)\to0$，$g(x)\to0$
2) 在 $N_\delta(a)$ 内可导，且 $g'(x)\neq0$
3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$ （有限或 ∞）

则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$

$\frac{\infty}{\infty}$ 不定型

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足：

1) $x\to a$ 时 $f(x)\to\infty$，$g(x)\to\infty$
2) 在 $N_\delta(a)$ 内可导，且 $g'(x)\neq0$
3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$ （有限或 ∞）

则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$

带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

设 $f(x)$ 在 $\mathring{N}_\delta(x_0)$ 内有直到 n 阶导数，则 $x\to x_0$ 时，

$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$. 其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

一元函数积分学

不定积分

设 $f(x)$ 在 I 上定义，$f(x)$ 的全体原函数称为 $f(x)$ 的不定积分，记为 $\int f(x)\,dx$.

由上讨论知，若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的某一个原函数，则 $\int f(x)\,dx=F(x)+C$

定积分

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上定义，用任意分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$

把 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,\cdots,n$.

$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$\forall$ 取 ξ_i，$x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$. 作 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ （即 Riemann 和）.

命 $\lambda=\max\{\Delta x_i\ (i=1,2,\cdots,n)\}$，无论 $[a,b]$ 怎样分割及 ξ_i 怎样取，

$\lambda\to0\ (n\to\infty)$ 时，若 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=A$ 存在，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 记 $A=\int_a^b f(x)\,dx$.