自然对数

2020年3月22日 星期日 21:28

一个序列 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$. 当 $n\to\infty$ 时，序列有界吗？

$$0<x_n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}$$ 二项式定理

$$+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots1}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})$$

$$+\cdots+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$\le 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$\le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}<1-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3 \qquad n\to\infty$$

x_n 有上界

$$(1+\frac{1}{n})^n=\overbrace{(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{1}{n})}^{n个}\cdot1\le\left(\frac{n(n+1)+1}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$ 均值不等式

x_n 是单增序列

$\Rightarrow$ 极限存在

定义 $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

不限于 $n\in N^*$ 的推广，求证 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in N$. s.t. $n>N$ 时

$$e-\varepsilon<(1+\frac{1}{n+1})^n<(1+\frac{1}{n})^{n+1}<e+\varepsilon$$

取 $\Delta=N+1$，$x>\Delta$ 时 $[x]>N$

$$e-\varepsilon<(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]}<(1+\frac{1}{x})^x<(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}<e+\varepsilon$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x\overset{\boxed{y=-x}}{=}\lim_{y\to+\infty}(1-\frac{1}{y})^{-y}$$

$$=\lim_{y\to+\infty}(\frac{y}{y-1})^y$$

$$=\lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y-1})^y$$

$$=\lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y-1})^{y-1}(1+\frac{1}{y-1})$$

$$=e$$

得证 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

$$\Rightarrow\lim_{a\to0}(1+a)^{\frac{1}{a}}=e$$

重要结论

$$\lim_{a\to0}\frac{\ln(1+a)}{a}=\lim_{a\to0}\ln(1+a)^{\frac{1}{a}}=\ln e=1$$

$=\ln\lim\limits_{a\to0}(1+a)^{\frac{1}{a}}$ ← 是个定理

$$\Rightarrow(e^x)'=e^x$$