常微分方程

2021年8月7日 星期六 17:51

1. $\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$

令 $u=ax+by+c$

$\frac{du}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}$

2. $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$

令 $u=\frac{y}{x}$, $y=xu$

$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

3. $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

其中 c_1 与 c_2 不同时为0.

若 $a_1b_2-b_1a_2\neq 0$ 若 $a_1b_2-b_1a_2=0$

令 $\begin{cases} u=a_1x+b_1y+c_1 \\ v=a_2x+b_2y+c_2 \end{cases}$ 令 $u=a_1x+b_1y$

4. $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

先求 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0 \Rightarrow y=Ce^{-F(x)}$

$\Rightarrow y=C(x)e^{-F(x)}$

$y'=C'(x)e^{-F(x)}+C(x)e^{-F(x)}(-P(x))$

代入得 $C'(x)=Q(x)e^{F(x)}$

5. $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}$ $\alpha\neq 0, \alpha\neq 1$.

令 $u=y^{1-\alpha} \Rightarrow \frac{du}{dx}+(1-\alpha)P(x)u=(1-\alpha)Q(x)$

6. $y^{n}+P_1y^{n-1}+\cdots+P_ny=0$

特征方程 $\lambda^n+P_1\lambda^{n-1}+\cdots+P_{n-1}\lambda+P_n=0$

设 λ_0 是特征根，令 $y_0=e^{\lambda_0x}$，则 $y_0^{k}=\lambda_0^{k}e^{\lambda_0x}$.

故 $y_0^{n}+P_1y_0^{n-1}+\cdots+P_ny_0=(\lambda_0^{n}+P_1\lambda_0^{n-1}+\cdots+P_n)e^{\lambda_0x}=0$

亦即 $y_0=e^{\lambda_0x}$ 是微分方程特解.

k重实特征根 λ $(k\geq 1)$ $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \cdots, x^{k-1}e^{\lambda x}$

k重共轭复根 $\lambda=\alpha\pm i\beta$ $e^{\alpha x}\cos\beta x$ $e^{\alpha x}\sin\beta x$

$xe^{\alpha x}\cos\beta x$ $xe^{\alpha x}\sin\beta x$

....

$x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$ $x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$