正项级数

2021年8月6日 星期五　　15:02

比较法之极限形式

设 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 皆正项.

若 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l < +\infty$，且 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛. 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛

若 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l > 0$ (其中 l 可为 $+\infty$)，且 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 发散. 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散

根式法 —— 蕴含 imply —— 比值法

Cauchy　　　　D'Alembert

设 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 正项，且 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.
则当 $l<1$ 时，级数收敛；
当 $l>1$ 时，级数发散

设 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 正项，且 $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.
则当 $l<1$ 时，级数收敛；
当 $l>1$ 时，级数发散

Abel 定理

对于 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. $\exists R\in\mathbb{R}$，$R>0$ 或 $R=+\infty$，使得

(1) 若 $|x|<R$，则 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 绝对收敛

(2) 若 $|x|>R$，则 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 发散

称此 R 为收敛半径，称 $(-R,R)$ 为收敛区间

Cauchy — Hadamard 公式

对于 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. 若 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$，或 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$，则

$$R = \begin{cases} \frac{1}{L}, & 0<L<+\infty \\ +\infty, & L=0 \\ 0, & L=+\infty \end{cases}$$

收敛域内

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n x^n dx$$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$　收敛域为 $[-1,1]$

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (x^{2n+1})' = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n$$

$$= \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

又 $S(0)=0$. $\forall x\in[-1,1]$，有

$$S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t)dt = \int_0^x S'(t)dt$$

$$= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x$$

特例：取 $x=1$，$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.