一些备注

2022年5月16日 星期一　09:13

平面标量场 例题

已知平面静电场的电场线为 $y^2=c^2+2cx\ (c>0)$，求等势线

$c=-x\pm\sqrt{x^2+y^2}$，$c>0 \rightarrow -x+\sqrt{x^2+y^2}=c$　$-x+\sqrt{x^2+y^2}$ 不调和

设 $v=F(t)\ \ (t=-x+\sqrt{x^2+y^2})$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=F''(t)\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-1\right]^2+F'(t)\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=F''(t)\left[\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]^2+F'(t)\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

代入拉普拉斯方程

$$2\left[1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]F''(t)+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}F'(t)=0$$

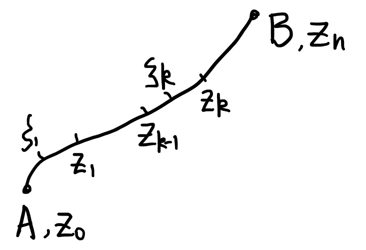
$$\frac{F''(t)}{F'(t)}=-\frac{1}{2t}$$

积分一次，得 $F'(t)=\frac{C}{\sqrt{t}}$

再积分一次，得 $F(t)=C_1\sqrt{t}+C_2$

$v=F(t)=C_1\sqrt{t}+C_2=C_1\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}+C_2 \Rightarrow$ 极坐标

柯西定理——单连通区情形



$$\int_l f(z)dz=\lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta z_k$$

$z_k=x_k+iy_k$，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

$$\int_l f(z)dz=\int_l u(x,y)dx-v(x,y)dy+i\int_l v(x,y)dx+u(x,y)dy$$

$$\oint_l f(z)dz=\oint_l u(x,y)dx-v(x,y)dy+i\oint_l v(x,y)dx+u(x,y)dy$$

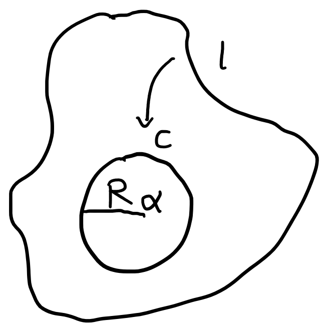
$$\oint_l Pdx+Qdy=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$\oint_l f(z)dz=-\iint_S\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy+i\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

柯西-黎曼条件 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial y}$

得 $\oint_l f(z)dz=0$.

计算积分 $I=\oint_l (z-\alpha)^n dz$（$n$ 为整数，$n<0$，l 包围 α）



$C: z-\alpha=Re^{i\varphi}$

$I=\oint_l (z-\alpha)^n dz$

$=\oint_C R^n e^{in\varphi}d(\alpha+Re^{i\varphi})$

$=\int_0^{2\pi}R^n e^{in\varphi}Re^{i\varphi}id\varphi$

$=iR^{n+1}\int_0^{2\pi}e^{i(n+1)\varphi}d\varphi$

如 $n\neq -1$，则 $I=iR^{n+1}\frac{1}{i(n+1)}e^{i(n+1)\varphi}\Big|_0^{2\pi}=0$

如 $n=-1$，则 $I=i\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi i$.

洛朗级数展开 例题

1. 在 $1<|z|<\infty$ 的环域上将函数 $f(z)=\frac{1}{z^2-1}$ 展为洛朗级数

$$\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}}=\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^2}\right)^k=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^6}+\cdots$$

2. 在 $z_0=1$ 的邻域上将函数 $f(z)=\frac{1}{z^2-1}$ 展为泰勒级数.

$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{z+1}$　奇点 $z_0=-1 \Rightarrow |z-1|<2$

$\frac{1}{2}\frac{1}{z+1}=\frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)+2}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{z-1}{2}\right)^k\quad(|z-1|<2)$

$\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2^{k+2}}(z-1)^k\quad(0<|z-1|<2)$