实对称矩阵的对角化

若A是实对称矩阵，则存在同阶的正交矩阵P使得P^TAP是实对角矩阵，从而实对称矩阵可对角化。

满足$P^TP=E$　　$B=P^TAP$　B为A的合同矩阵　P为A到B的合同变换矩阵

而$P^TP=E \Rightarrow P^T=P^{-1}$　$B=P^{-1}AP$　$B\sim A$

设 $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&3&1\\2&1&2\end{pmatrix}$　求正交矩阵P，使P^TAP为对角矩阵。

先求A的特征值和对应特征向量

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-2\\-1&\lambda-3&-1\\-2&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&0&-\lambda\\-1&\lambda-3&-1\\-2&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-5)$$

对$\lambda=5$，由$\begin{pmatrix}3&-1&-2\\-1&2&-1\\-2&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$　$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

对$\lambda=2$，由$\begin{pmatrix}0&-1&-2\\-1&-1&-1\\-2&-1&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$　$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

对$\lambda=0$　由$\begin{pmatrix}-2&-1&-2\\-1&-3&-1\\-2&-1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$　$\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量相互正交

ξ_1,ξ_2,ξ_3已两两正交，将它们单位化，取

$\eta_1=\dfrac{1}{\sqrt{\xi_1^T\xi_1}}\xi_1=\dfrac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$　　$\eta_2=\dfrac{1}{\sqrt{\xi_2^T\xi_2}}\xi_2=\dfrac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$　　$\eta_3=\dfrac{1}{\sqrt{\xi_3^T\xi_3}}\xi_3=\dfrac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

再令

$$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{2}{\sqrt6}&0\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$$

则有$P^TP=E$，$P^TAP=P^{-1}AP=\mathrm{diag}(5,2,0)$