行简化梯形矩阵

(1) 若有零行，则零行全部在下方

(2) 从第一行起，每行第一个非零元素前面零的个数逐行增加

(3) 非零行的第一个非零元素为1，且"1"所在列的其元素全为零.

高斯消元法解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=-5 \\ 3x_1+x_2+2x_3=-1 \\ 4x_1+3x_2+8x_3=-14 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -14 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 8 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{搞个"1"出来(头上)}]{r_2+(-1)r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & 8 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{底行头"0"}]{r_3+(-2)r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{顶行放"1"}]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{化梯(自上而下)}]{r_2+(-2)r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -13 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{化梯}]{r_3+(-1)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{化"1"} \\ \text{2nd行已为"1"}}]{-\frac{1}{3}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{化"0"}]{r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{化"0"}]{r_2+(-5)r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \\ x_3=-3 \end{cases}$$

齐次方程组解的结构

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+2x_3+7x_4=0 \\ 3x_1-6x_2+4x_3+4x_4=0 \\ 4x_1-8x_2+4x_3+15x_4=0 \end{cases}$$

非自由

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 7 \\ 3 & -6 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 4 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(\frac{1}{2})r_1 \\ r_2+(-3)r_1 \\ r_3+(-4)r_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3.5 \\ 0 & 0 & 1 & -6.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1+(-1)r_2 \\ r_1+(-10)r_3 \\ r_2+6.5r_3}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

取自由变量 x_2 为1，解得基础解系为 $\alpha=(2,1,0,0)^T$.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+x_3=0 \\ x_1+4x_2-4x_3+3x_4=0 \\ 4x_1+6x_2-x_3+2x_4=0 \\ 2x_1-2x_2+7x_3-4x_4=0 \end{cases}$$

自由变量各取"1".

非自由

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -4 & 3 \\ 4 & 6 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 7 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_4+(-4)r_1 \\ r_5+(-2)r_1}]{\substack{r_2+(-2)r_1 \\ r_3+(-1)r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -6 & 9 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_4+(-1)r_2 \\ r_5+(-3)r_2 \\ (-\frac{1}{2})r_2}]{\substack{r_1+r_2 \\ r_3+r_2}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

非齐次方程组解的结构

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=6 \\ 2x_1+2x_2+x_3=6 \\ x_1+4x_2-4x_3+3x_4=12 \\ 4x_1+6x_2-x_3+2x_4=18 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 4 & -4 & 3 & 12 \\ 4 & 6 & -1 & 2 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-4r_1]{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & -2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}r_2]{\substack{r_3+r_2 \\ r_4-r_2}} \begin{array}{c} \text{非自由} \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

令 $x_3=x_4=0$ 得方程组的一个特解：$\eta=(0,3,0,0)^T$ 特解：自由向量都取 0.

基础解系 $\alpha_1=(-2,\frac{3}{2},1,0)^T$ $\alpha_2=(1,-1,0,1)^T$.

通解：$x=\eta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$.

施密特正交化方法

将 3 个线性无关 4 维向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 标准正交化

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

先做正交化. 令

$$\xi_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \xi_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\xi_1)}{\|\xi_1\|^2}\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\xi_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\xi_1)}{\|\xi_1\|^2}\xi_1-\frac{(\alpha_3,\xi_2)}{\|\xi_2\|^2}\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

再做标准化

$$\beta_1=\frac{1}{\|\xi_1\|}\xi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \quad \beta_2=\frac{1}{\|\xi_2\|}\xi_2=\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \beta_3=\frac{1}{\|\xi_3\|}\xi_3=\sqrt{\frac{2}{3}}\xi_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\0\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$