洛朗级数展开：在 $z_0=0$ 的邻域上将 $e^{\frac{1}{2}x(z-\frac{1}{z})}$ 展开.

$$e^{\frac{1}{2}x(z-\frac{1}{z})} = e^{\frac{1}{2}xz}\, e^{-\frac{1}{2}x\frac{1}{z}}$$

$$e^{\frac{1}{2}xz} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}\left(\frac{1}{2}xz\right)^l \quad (|z|<\infty), \qquad (3.5.14)$$

$$e^{-\frac{1}{2}x\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}x\frac{1}{z}\right)^n \quad (0<|z|) \qquad (3.5.15)$$

绝对收敛级数 (3.5.14) 和 (3.5.15) 可以逐项相乘，乘积中既有无限多正幂项，又有无限多负幂项.

为得到乘积中某个正幂 z^m $(m\geq 0)$ 项，应取 (3.5.15) 所有各项分别用 (3.5.14) 中的 $l=n+m$ 项去乘.

为得到乘积中某个负幂 z^{-h} $(h>0)$ 项，应取 (3.5.14) 所有各项分别用 (3.5.15) 中的 $n=l+h$ 项去乘.

$$e^{\frac{1}{2}x(z-\frac{1}{z})} = \sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(m+n)!\,n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}\right]z^m + \sum_{h=1}^{\infty}\left[(-1)^h\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!\,(l+h)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{h+2l}\right]z^{-h} \quad (0<|z|<\infty).$$

$$\overset{-h\to m}{\underset{l\to n}{=}} \sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(m+n)!\,n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}\right]z^m + \sum_{m=-1}^{-\infty}\left[(-1)^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(n+|m|)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{|m|+2n}\right]z^m \quad (0<|z|<\infty).$$

[...] 里正是 m 阶贝塞尔函数 $J_m(x)$. $e^{\frac{1}{2}x(z-\frac{1}{z})} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)\, z^m$