$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t); \\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=0; \\ u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=0,\ (0<x<l). \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=0; \\ v|_{x=0}=0,\ v|_{x=l}=0; \\ v|_{t=\tau}=0,\ v_t|_{t=\tau}=f(x,\tau),\ (0<x<l). \end{cases}$$

$$u_t^{(\tau)}|_{t=\tau+d\tau}=f(x,\tau)\,d\tau$$

$$u^{(\tau)}(x,t)=v(x,t;\tau)\,d\tau$$

$$u(x,t)=\sum_{\tau=0}^{t}u^{(\tau)}(x,t)=\int_0^t v(x,t;\tau)\,d\tau$$

数学验证

- 边界条件

$v|_{x=0}=0,\ v|_{x=l}=0.$

$u|_{x=0}=\int_0^t v|_{x=0}\,d\tau=0,\ u|_{x=l}=\int_0^t v|_{x=l}\,d\tau=0.$

- 初始条件

$u|_{t=0}=\int_0^0 v|_{t=0}\,d\tau=0.$

$u_t(x,t)=\int_0^t v_t(x,t;\tau)\,d\tau+v(x,t;t)$

由 $v|_{t=\tau}=0,\ v(x,\tau;\tau)=0\ (0\le\tau\le t).$

$u_t(x,t)=\int_0^t v_t(x,t;\tau)\,d\tau$

$u_t|_{t=0}=\int_0^0 v_t|_{t=0}\,d\tau=0$

- 齐次方程

$u_{tt}=\int_0^t v_{tt}(x,t;\tau)\,d\tau+v_t(x,t;t)$

又 $v_t|_{t=\tau}=f(x,\tau),\ v_t(x,\tau;\tau)=f(x,\tau)\ (0\le\tau\le t).$

$u_{tt}=\int_0^t v_{tt}(x,t;\tau)\,d\tau+f(x,t)$

$u_{tt}-a^2u_{xx}=\int_0^t(v_{tt}-a^2v_{xx})\,d\tau+f(x,t)=\int_0^t 0\,d\tau+f(x,t)$

$=f(x,t)$

求解定解问题

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega t;$$
$$u_x|_{x=0}=0,\ u_x|_{x=l}=0;$$
$$u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=0,\ (0<x<l).$$

解 应用冲量定理法，先求解

$$v_{tt}-a^2v_{xx}=0;$$
$$v_x|_{x=0}=0,\ v_x|_{x=l}=0;$$
$$v|_{t=\tau+0}=0,\ v_t|_{t=\tau+0}=A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega\tau.$$

参照边界条件，试把解 v 展开为傅里叶余弦级数

$$v(x,t;\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t;\tau)\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

把这余弦级数代入泛定方程

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n''+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n\right]\cos\frac{n\pi x}{l}=0$$

由此分离出 T_n 的常微分方程

$$T_n''+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n=0.$$

这个常微分方程的解是

$$T_0(t;\tau)=A_0(\tau)+B_0(\tau)(t-\tau),$$
$$T_n(t;\tau)=A_n(\tau)\cos\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}+B_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\quad(n=1,2,\cdots).$$

这样，解 v 具有傅里叶余弦级数形式，为

$$v(x,t;\tau)=A_0(\tau)+B_0(\tau)(t-\tau)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n(\tau)\cos\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}+B_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\right]\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

至于系数 $A_n(\tau)$ 和 $B_n(\tau)$ 则由初始条件确定。为此，把上式代入初始条件，

$$A_0(\tau)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(\tau)\cos\frac{n\pi x}{l}=0,$$
$$B_0(\tau)+\sum_{n=1}^{\infty}B_n(\tau)\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}=A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega\tau$$

右边的 $A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega\tau$ 也是傅里叶余弦级数，它只有一个单项即 $n=1$ 的项。
比较两边系数，得

$$A_n(\tau)=0,\ B_1(\tau)=A\frac{l}{\pi a}\sin\omega\tau,\ B_n(\tau)=0,\ (n=2,3,\cdots).$$

到此，已求出 $v(x,t;\tau)$

$$v(x,t;\tau)=A\frac{l}{\pi a}\sin\omega\tau\sin\frac{\pi a(t-\tau)}{l}\cos\frac{\pi x}{l}.$$

得出答案

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\int_0^t v(x,t;\tau)\\&=\frac{Al}{\pi a}\cos\frac{\pi x}{l}\int_0^t\sin\omega\tau\sin\frac{\pi a(t-\tau)}{l}d\tau\\&=\frac{Al}{\pi a}\frac{1}{\omega^2-\pi^2a^2/l^2}\left(\omega\sin\frac{\pi a}{l}t-\frac{\pi a}{l}\sin\omega t\right)\cos\frac{\pi x}{l}.\end{aligned}$$