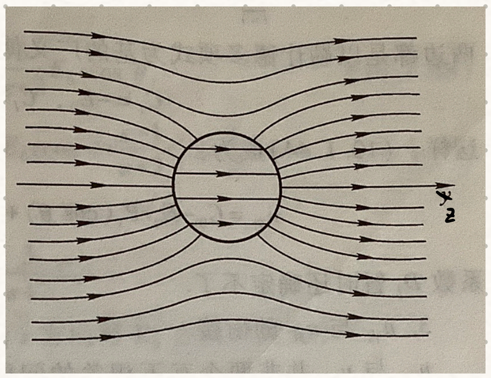
在本来是匀强的静电场中放置均匀介质球. 本来的电场强度是$\vec{E}_0$, 球的半径是r_0, 介电常数是ε. 试求解介质球内外的电场强度.



解 取球心为球坐标的极点, 通过球心而平行于$\vec{E}_0$的直线显然是对称轴, 取这对称轴作为球坐标系的极轴.

由于介质球的极化, 球面出现束缚电荷, 以致电场强度$\vec{E}$在球面不连续, $\Delta u = \nabla\cdot\nabla u = -\nabla\cdot\vec{E}$ 在球面上没有意义, 从而拉普拉斯方程在球面上没有意义. 我们只好先分别考虑球内的电势$u_内$和球外的电势$u_外$, 然后通过衔接条件使两者在球面上衔接起来.

1. 球内电势$u_内$

球内电势$u_内$满足

$$\Delta u_内 = 0 \quad (r<r_0)$$

在轴对称情况下, $\Delta u_内=0$的一般解是

$$u_内 = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l \frac{1}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta).$$

考虑到$u_内$在球心$r=0$应为有限, 舍弃$1/r^{l+1}$项, 令$B_l=0$.

$$u_内 = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta).$$

系数A_l暂时确定不了.

2. 球外电势$u_外$

球外电势$u_外$满足

$$\Delta u_外 = 0 \quad (r>r_0)$$

$$u_外|_{r\to\infty} \sim -E_0 r\cos\theta$$

在轴对称情况下, $\Delta u_外=0$的一般解是

$$u_外 = \sum_{l=0}^{\infty}\left(C_l r^l + D_l \frac{1}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$$

把上式代入$u_外|_{r\to\infty} \sim -E_0 r\cos\theta$. 对于很大的$r$, D_l/r^{l+1}项远远小于r^l项. 考虑到这一点, 代入的结果是

$$\sum_{l=1}^{\infty} C_l r^l P_l(\cos\theta) \sim -E_0 r\cos\theta = -E_0 r P_1(\cos\theta)$$

两边都是以勒让德多项式为基的广义傅里叶级数. 两边比较系数, 得

$$C_1 = -E_0,\ C_l = 0.\ (l\neq 0,1)$$

这样, $u_外$成为

$$u_外 = C_0 - E_0 r P_1(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} D_l \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta).$$

系数D_l暂时还确定不了.

3. $u_内$与$u_外$的衔接

$u_内$与$u_外$应当在球面上互相衔接(电势在球面上连续),

$$u_内|_{r=r_0} = u_外|_{r=r_0};$$

还有, 电位移$\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = -\varepsilon\varepsilon_0\nabla u$的法向分量即$-\varepsilon\varepsilon_0\partial u/\partial r$在球面上连续(介质球本来不带电),

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial u_内}{\partial r}\Big|_{r=r_0} = \varepsilon_0 \frac{\partial u_外}{\partial r}\Big|_{r=r_0}.$$

把$u_内$和$u_外$带入衔接条件.

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} A_l r_0^l P_l(\cos\theta) = C_0 - E_0 r_0 P_1(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{D_l}{r_0^{l+1}} P_l(\cos\theta), \\ \varepsilon\sum_{l=0}^{\infty} l A_l r_0^{l-1} P_l(\cos\theta) = -E_0 P_1(\cos\theta) - \sum_{l=0}^{\infty}(l+1)\frac{D_l}{r_0^{l+2}} P_l(\cos\theta). \end{cases}$$

比较两边的系数, 得

$$\begin{cases} A_0 = C_0 + D_0\frac{1}{r_0}, \\ 0 = D_0 \frac{1}{r_0^2}; \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 r_0 = -E_0 r_0 + D_1 \frac{1}{r_0^2}, \\ \varepsilon A_1 = -E_0 - 2D_1\frac{1}{r_0^3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_l r_0^l = D_l \frac{1}{r_0^{l+1}}, \\ \varepsilon l A_l r_0^{l-1} = -(l+1) D_l \frac{1}{r_0^{l+2}}. \end{cases} \quad (l\neq 0,1).$$

由此解得

$$\begin{cases} D_0 = 0, \\ C_0 = A_0; \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 = -\frac{3}{\varepsilon+2}E_0 \\ D_1 = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} r_0^3 E_0; \end{cases} \quad \begin{cases} A_l = 0, \\ D_l = 0. \end{cases} \quad (l\neq 0,1)$$

最终解为

$$\begin{cases} u_内 = A_0 - \frac{3}{\varepsilon+2} E_0 r\cos\theta, \\ u_外 = A_0 - E_0 r\cos\theta + \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} r_0^3 E_0 \frac{1}{r^2}\cos\theta. \end{cases}$$

球内电势又可表为

$$u_内 = A_0 - \frac{3}{\varepsilon+2} E_0 z$$

由此可见, 球内场强$E_内 = -\nabla u_内$沿z方向即$\vec{E}_0$方向, 其大小

$$E_内 = -\frac{\partial u_内}{\partial z} = \frac{3}{\varepsilon+2}E_0.$$

这是说, $E_内$仍为匀强电场, 只是按一定比率削弱了.

球内极化强度

$$P_内 = \varepsilon_0(\varepsilon-1)E_内 = \varepsilon_0\frac{3(\varepsilon-1)}{\varepsilon+2}E_0$$

也是常数. 这说明球的极化是均匀的.