什么是热辐射的子系?

(1) 波：把空窖中的电磁场分解成无穷多简正振动.(瑞利、金斯、普朗克)

(2) 粒子：把辐射场看成由大群光子组成的光子气体.(爱因斯坦)

实验事实：热辐射的谱密度是频率和温度的普适函数.

---

(1) 把空窖内电磁波分解成各个频率的简正振动

→求解真空中的自由电磁场(无电荷、无电流)的本征值问题.

引入电磁场矢势 $\vec{A}$ 与标势 A_0，选规范使 $A_0=0$，

则 $\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$，$\vec{H}=\nabla\times\vec{A}$，$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0$. $\nabla\cdot\vec{A}=0$.

令 Ψ 代表 $\vec{A}$ 的任一分量，$\nabla^2\Psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=0$.

为方便，设空窖为边长为 L 的正方体，并选周期性边条件.

$$\begin{cases}\Psi(x+L,y,z)=\Psi(x,y,z)\\ \Psi(x,y+L,z)=\Psi(x,y,z)\\ \Psi(x,y,z+L)=\Psi(x,y,z)\end{cases}$$

特解 $\Psi_{\vec{k}}(\vec{r},t)=\Phi_{\vec{k}}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ —— $\ddot{\Phi}_{\vec{k}}(t)+\omega^2\Phi_{\vec{k}}(t)=0$

其中 $\omega=ck$，$\vec{k}$ 为波矢. $\Phi_k(t)\sim e^{-i\omega t}$.

周期性边界条件 $\Rightarrow \vec{k}=\frac{2\pi}{L}(n_1,n_2,n_3)$ $(n_i=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

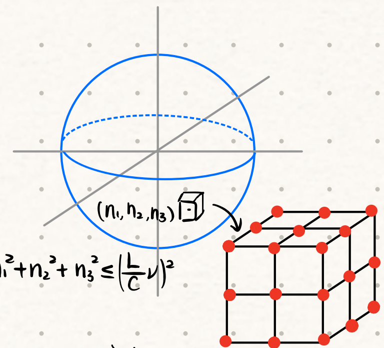
k 间断，ω 间断.

简正模：$\Psi_{\vec{k}}^{(\alpha)}(\vec{r},t)=C_{\vec{k}}^{(\alpha)}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

$\alpha=1,2$ 代表相互垂直的两个偏振方向.

每一个简正模在力学上等价于一个振动自由度

记 $G(\nu)$ 为 $(0,\nu)$ 内总自由度数.



$n_1^2+n_2^2+n_3^2\le\left(\frac{L}{c}\nu\right)^2$

偏振 $\quad V=L^3$

$G(\nu)=2\times\frac{4\pi}{3}\left(\frac{L}{c}\nu\right)^3=\frac{8\pi V}{3c^3}\nu^3$

频率间隔在 $(\nu,\nu+d\nu)$ 内简正模自由度数

$g(\nu)d\nu=\frac{8\pi V^3}{c^3}\nu^2d\nu$

空窖中辐射场频率取 $[0,\infty)$

$\int_0^\infty g(\nu)d\nu=\infty$

辐射场热运动图像：由于窖壁原子不断地发射与吸收电磁波，使窖内各个振子的振幅不断作无规则变化.

$\frac{\bar{E}}{V}=\int_0^\infty u(\nu,T)d\nu=\int_0^\infty\bar{\varepsilon}(\nu)\tilde{g}(\nu)d\nu$ $\quad u(\nu,T)d\nu=\bar{\varepsilon}(\nu)\tilde{g}(\nu)d\nu$

$\tilde{g}(\nu)d\nu=\frac{1}{V}g(\nu)d\nu=\frac{8\pi}{c^3}\nu^2d\nu$ $\quad$ 频率为 ν 的振子的平均能量

(1.a) 瑞利-金斯公式

应用经典统计的能量均分定理

$\bar{\varepsilon}(\nu)=\bar{\varepsilon}=kT$

$u(\nu,T)d\nu=\frac{8\pi}{c^3}kT\nu^2d\nu$

在低频区与实验相符，在高频区严重偏离.

$u=\int_0^\infty u(\nu,T)d\nu=\frac{8\pi}{c^3}kT\int_0^\infty\nu^2d\nu=\infty$ 内能发散. 但实际上 $u=aT^4$ 不发散.

(1.b) 普朗克的量子理论

假定对频率为 ν 的振子，$\varepsilon_n(\nu)=nh\nu$ 分立

振子平均分布遵从 MB 分布，即 $\bar{a}_n(\nu)=e^{-\alpha-\beta\varepsilon_n(\nu)}$

$$\bar{\varepsilon}=\frac{\sum_n\varepsilon_n(\nu)e^{-\alpha-\beta\varepsilon_n}}{\sum_n e^{-\alpha-\beta\varepsilon_n}}=\frac{\sum_n\varepsilon_n(\nu)e^{-\beta\varepsilon_n}}{\sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}}$$

即 $\bar{\varepsilon}(\nu)=-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z(\nu)$，$Z(\nu)=\sum_{n=0}^\infty e^{-\beta\varepsilon_n(\nu)}=\frac{1}{1-e^{-\beta h\nu}}$

$$\bar{\varepsilon}(\nu)=\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

$$u(\nu,T)d\nu=\frac{8\pi}{c^3}\frac{h\nu^3d\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

$$u=\int_0^\infty u(\nu,T)d\nu=\frac{8\pi}{c^3}\int_0^\infty\frac{h\nu^3d\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

$$=\frac{8\pi}{c^3}\frac{(kT)^4}{h^3}\int_0^\infty\frac{x^3dx}{e^x-1}$$

$$=\frac{8\pi^5k^4}{15h^3c^3}T^4$$

若 $\frac{h\nu}{kT}\ll1$

$e^{\frac{h\nu}{kT}}\approx1+\frac{h\nu}{kT}$

$\bar{\varepsilon}=kT$